Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
1AD100 - ore 9:30 — 28 gennaio 2015
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Sia $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Si consideri l'equazione differenziale
$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
Tracciare il ritratto in fase, indicando la natura degli equilibri.

2. Si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} = -f'(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
Tracciare il ritratto in fase. Stabilire per quali valori del parametro $v \in \mathbb{R}$ la soluzione con dato iniziale $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = v$ è periodica (suggerimento: si scriva una condizione che coinvolga l'energia).

3. Si supponga che sul sistema in 2. agisca anche una forza di attrito dipendente dalla velocità
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -f'(x) - \mu v^2 \qquad \underline{\mu > 0} \end{cases}$$
Determinare gli equilibri di tale sistema. Linearizzare il sistema attorno all'equilibrio $(1, 0)$. Usando il Primo Metodo di Lyapunov, determinare la stabilità dell'equilibrio $(1, 0)$.

1.2 Dare la definizione di stabilità, instabilità e stabilità asintotica.

2

2.1 Il piano cartesiano Oxy è associato ad un sistema di riferimento non inerziale $Oxyz$, con asse z verticale ascendente ($\underline{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$) e con velocità angolare di trascinamento costante $\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$. Un punto materiale P di massa m è vincolato senza attrito su Oxy e una molla di costante elastica $h > 0$ è tesa tra P e il punto fisso O.

(a) Dare delle condizioni sui parametri strutturali del sistema (m, ω, g, h) affinché l'origine O sia d'equilibrio stabile.

(b) È vero o falso che, comunque fissati nei positivi m, g, h, l'origine O è stabile per ogni valore di ω? Spiegare in dettaglio.

2.2 Si scrivano le equazioni di Euler per il corpo rigido libero, in forma compatta vettoriale. Si supponga che il momento totale delle forze esterne rispetto al baricentro G del corpo rigido in studio sia $\underline{N}_{ext} = -k\underline{\omega}$, per $k > 0$ costante. Dimostrare che nello spazio delle velocità angolari $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$ l'origine $\underline{\omega} = \underline{0}$ è un equilibrio asintoticamente stabile per il sistema di Euler. (Suggerimento: pensare all'energia cinetica T_G come ad una candidata funzione di Lyapunov).

2.3 Sia $L(q, \dot{q})$ una Lagrangiana indipendente dal tempo. Cosa significa che le equazioni di Hamilton sono *coniugate* alle equazioni di Lagrange? Spiegare in dettaglio.

1.1 (traccia)

1. Dal grafico di $f(x)$ si deduce che l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ ha un unico equilibrio nell'origine. Tale equilibrio risulta essere repulsivo.

2. La soluzione con dato iniziale $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = v$ è periodica per $\frac{1}{2}v^2 + f(-1) < 0$ ovvero per $v^2 < \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3. Gli equilibri di tale sistema sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(1, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{e}} & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x-1 \\ v \end{pmatrix}$$

Essendo $Spect(A) = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{e}}}$, l'equilibrio $(1, 0)$ risulta instabile.

2.1

(a) La geometria è semplice, il sistema è 2-dim, la varietà vincolare è il piano $Oxy \simeq \mathbb{R}^2$ e i parametri Lagrangiani (globali, in questo caso) sono x, y. Le forze attive su P sono la gravità, l'elastica e le forze apparenti: la centrifuga e Coriolis. Dobbiamo determinare le Componenti Lagrangiane della Sollecitazione per queste forze e nel caso conservativo scriverne l'energia potenziale. Si scrive la 1-forma lavoro:

$$dL^g = m\underline{g} \cdot dP \equiv 0, \quad \forall dP = (dx, dy, 0),$$

la gravità fa sempre lavoro nullo: non entrerà nella determinazione di equilibri e dinamica.

$$dL^h = -hOP \cdot dP = -h(xdx + ydy) = -d(\frac{1}{2}h(x^2 + y^2)) \Rightarrow \mathcal{U}^h(x, y) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2)$$

$$dL^{centr} = m\omega^2 OP \cdot dP = m\omega^2(xdx + ydy) = -d(-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)) \Rightarrow \mathcal{U}^{centr}(x, y) = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

$$dL^{Cor} = -2m\underline{\omega} \wedge \dot{OP} \cdot dP = -2m \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{pmatrix} \cdot (dx, dy, 0),$$

$$dL^{Cor} = (2m\omega\dot{y})dx + (-2m\omega\dot{x})dy$$

pertanto le Componenti Lagrangiane della Sollecitazione per Coriolis, che non è posizionale perché dipende dalla velocità, sono:

$$Q_x^{Cor}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2m\omega\dot{y}, \qquad Q_y^{Cor}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -2m\omega\dot{x}$$

La ricerca degli equilibri per questo sistema a vincoli lisci si effettua studiando le (x^*, y^*) tali che

$$Q_x^{totale}(x^*, y^*, \dot{x}^* = 0, \dot{y}^* = 0) = 0, \quad Q_y^{totale}(x^*, y^*, \dot{x}^* = 0, \dot{y}^* = 0) = 0,$$

$$-hx^* + m\omega^2 x^* = 0, \quad -hy^* + m\omega^2 y^* = 0$$

supponendo (altrimenti tutti i punti del piano sarebbero d'equilibrio) che $h \neq m\omega^2$, l'unico p.to di equilibrio è l'origine $(0, 0)$ di $\mathbb{R}^2$. Dato che Coriolis è "a potenza nulla",

$$\Pi^{Cor} = Q_x^{Cor}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{x} + Q_y^{Cor}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{y} = 0,$$

si può applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet per l'indagine sulla stabilità: si guarda l'energia potenziale delle rimanenti sollecitazioni che sono conservative (elastica e centrifuga) e si investiga quando $(0, 0)$ è un minimo stretto locale:

$$\mathcal{U}^{h+centr} = \frac{1}{2}(h - m\omega^2)(x^2 + y^2)$$

ovviamente questo accade per

$$h > m\omega^2$$

(b) Questo quesito richiesto non pesava in negativo se non svolto, caso mai, in positivo, a supplire eventuali altre carenze nell'elaborato.

Quanto appena trovata in (a) è sicuramente una condizione "sufficiente" per la stabilità. Ciononostante, alla fine del paragrafo 3.3 'Teorema di Lagrange-Dirichlet', della dispensa, si indica che in effetti c'è invece stabilità per *ogni* scelta dei parametri strutturali. Bastava solo citare questo fatto. *L'esercizio è stato fatto a lezione in dettaglio. Qui non era certamente richiesto, scriviamo qui di seguito per comodità quel conto.* Si pensa a $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. Si considera l'equazione differenziale dinamica, le equazioni di Lagrange per questo sistema, è un'equazione diff. del secondo ordine in $\mathbb{R}^2$,

$$m\ddot{x} = (m\omega^2 - h)x + 2m\omega\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = (m\omega^2 - h)y - 2m\omega\dot{x}$$

si moltiplica seconda per l'unità immaginaria i, e si somma m. a m., posto $z := x + iy$, si ottiene un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in $\mathbb{C}$:

$$m\ddot{z} = (m\omega^2 - h)z - 2im\omega\dot{z}$$

e si integra direttamente il sistema lineare, $m\ddot{z} + 2im\omega\dot{z} - (m\omega^2 - h)z = 0$, solita tecnica, si cerca una base dello spazio vettoriale (in questo caso, $\mathbb{C}$-spazio) con funzioni curve test $z = e^{\lambda}t$, si ottiene per λ

$$m\lambda^2 + 2im\omega\lambda - (m\omega^2 - h) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-im\omega \pm \sqrt{-m^2\omega^2 + m(m\omega^2 - h)}}{m} = -i\omega \pm i\sqrt{\frac{h}{m}}$$

l'integrale generale è la generica $\mathbb{C}$-combinazione complessa

$$z(t, C_1, C_2) = e^{-i\omega t}\left(C_1 e^{i\sqrt{\frac{h}{m}}} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{h}{m}}}\right)$$

Sulla base di $z = x + iy$, esiste una ben precisa mappa lineare non degenere (trovarla per esercizio) che lega

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (C_1, C_2) \longmapsto (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}^2$$

In sostanza, la parte entro parentesi $\left(C_1 e^{i\sqrt{\frac{h}{m}}} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{h}{m}}}\right)$ genera oscillazioni nel piano relative ad una particella di massa m e molla h in un sistema inerziale, il termine a fattore $e^{-i\omega t}$ fa ruotare il tutto in verso orario con v. ang. costante ω: configurazioni e velocità restano uniformemente limitate e sono piccole se i dati iniziali sono piccoli: è la stabilità, è come dire che il piano liscio rotante alla particella non gli fa proprio nulla.

2.2

Indicando con $J_G = J_G^T$ la matrice simm. definita positiva operatore d'inerzia rispetto al baricentro, le equazioni di Euler per il corpo rigido con quel N_G^{ext} sono;

$$J_G\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge J_G\underline{\omega} = -k\underline{\omega}$$

Se si volesse mettere in forma normale (ma non serve):

$$\dot{\underline{\omega}} = J_G^{-1}\left(-\underline{\omega} \wedge J_G\underline{\omega} - k\underline{\omega}\right)$$

È un'equazione differenziale non lineare del primo ordine in $\mathbb{R}^3$. Ben si vede che $\underline{\omega} = 0$ è d'equilibrio, annulla il campo vettoriale a destra dell'espressione sopra. Consideriamo, come suggerito dal testo,

$$T_G(\underline{\omega}) = \frac{1}{2}\underline{\omega}^T J_G\underline{\omega} = \frac{1}{2}(\underline{\omega} \cdot J_G\underline{\omega})$$

Chiaramente è definita positiva attorno a $\underline{\omega} = 0$ e la sua derivata di Lie è

$$\dot{T}_G = (\underline{\omega} \cdot J_G\dot{\underline{\omega}}) = (\underline{\omega} \cdot (-\underline{\omega} \wedge J_G\underline{\omega} - k\underline{\omega})) = -k|\underline{\omega}|^2 < 0, \quad \forall\underline{\omega} \neq 0$$

dunque è strettamente definita negativa attorno a $\underline{\omega} = 0$: T_G è dunque una funzione di Lyapunov per l'asintotica stabilità.